

Étude du défi du lancer de bouteille

Ou comment ralentir un objet sans lui appliquer de force

par **Adrien GAY**
Lycée Masséna - 06200 Nice
adrien.gay@ens.psl.eu

CET ARTICLE présente une étude du défi du lancer de bouteille (plus couramment appelé *Bottleflip Challenge*). Il consiste à lancer une bouteille d'eau en l'air en la tenant par le bouchon pour lui faire faire une rotation complète et la faire atterrir sur sa base. Il y a de nombreuses variantes, mais nous nous contenterons de l'étude du jeu dans sa version originale : une bouteille de 50 ml en plastique remplie d'eau jusqu'à un certain niveau. Le défi expliqué tel quel peut paraître complexe à réaliser, voire relever de la prouesse. Il est pourtant relativement simple à réussir. Ceci réside dans le fait que la vitesse angulaire de la bouteille décroît fortement lors de sa chute, ce que nous chercherons à expliquer. Le manque de symétrie et d'invariance du problème nous prive d'utiliser les équations de Navier-Stokes pour décrire le mouvement de l'eau dans la bouteille. Il faut donc trouver des moyens d'études indirects.

INTRODUCTION

Cet article a pour vocation d'expliquer et de modéliser les phénomènes observés durant un lancer de bouteille. Nous n'étudierons que des lancers réussis, c'est-à-dire tels que la bouteille atterrit sur sa base une fois au sol. Commençons par quelques remarques préliminaires. Cette étude est celle du mouvement d'une bouteille en rotation et en chute libre ainsi que du déplacement de l'eau dans le référentiel de la bouteille (cf. figure 1, page ci-après). La durée caractéristique d'un lancer est de 0,5 seconde. La vitesse angulaire de la bouteille décroît rapidement une fois que la chute a commencé. C'est ce qui rend le jeu réalisable. On remarque qu'un paramètre important est le niveau de remplissage de la bouteille. Si la bouteille est totalement pleine ou totalement vide, le jeu devient subitement beaucoup plus difficile à réaliser alors qu'avec une bouteille moyennement remplie, le jeu se réussit aisément au bout de quelques essais. De plus, il faut que l'eau puisse se déplacer, même avec un niveau de remplissage intermédiaire, si l'eau est bloquée (gelée par exemple) le défi reste difficile à réaliser. Ainsi, le déplacement de l'eau semble avoir un rôle important dans la décroissance de la vitesse angulaire de la bouteille. Enfin, la bouteille ne subit que son poids et donc aucun moment ne s'applique sur la bouteille (en chute libre). Ainsi ce n'est pas une force extérieure qui peut expliquer le rapide ralentissement de la bouteille (dès



Figure 1 - Chronophotographie d'un lancer de bouteille réussi. L'axe de rotation est perpendiculaire à l'axe de la bouteille (il est perpendiculaire au plan de la figure). *Remarque* : la trajectoire de la bouteille a volontairement été exagérée pour montrer différentes phases du mouvement.

que le remplissage est non nul, les forces de frottement fluide sont négligeables). Nous commencerons par une étude «phénoménologique» de ces phénomènes puis nous proposerons un modèle informatique simulant le mouvement de l'eau dans la bouteille au cours d'un lancer.

Appliquons le théorème du moment cinétique à la bouteille et son contenu dans le référentiel de la bouteille. Ce référentiel est non galiléen : il est en chute libre et en rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de la bouteille (cf. figure 2). Le système n'est soumis qu'à son poids, or cette force s'applique sur le centre de masse du système et coupe donc l'axe de rotation. Le moment du poids est donc nul. On a donc :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

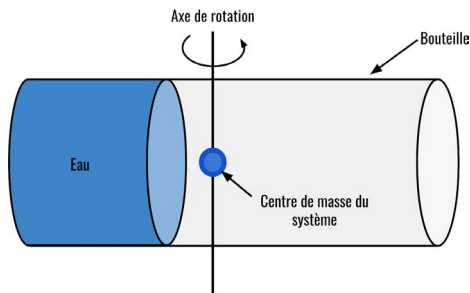


Figure 2 - Schéma du sens de rotation de la bouteille.

Ainsi le moment cinétique de la bouteille se conserve. En projetant cette relation sur l'axe de rotation, et en la primitivant, on obtient :

$$L = J \cdot \omega = \text{cte.}$$

J est le moment d'inertie de la bouteille et de son contenu et ω la vitesse angulaire de la bouteille. La vitesse angulaire de la bouteille dépend donc uniquement de la répartition de l'eau dans la bouteille (celle-ci étant considérée indéformable) et d'une constante dépendant des conditions initiales du lancer.

1. ÉTUDE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DU DÉFI DU LANCER DE BOUTEILLE

Pour comprendre ce qui se passe dans la bouteille, nous avons réalisé plusieurs lancers en faisant varier le niveau de remplissage des bouteilles. Nous avons mis en place une gamme de remplissage allant de $R = 0,09$ à $R = 1$ (R étant le rapport du niveau de remplissage sur la hauteur de la bouteille). Les lancers sont faits avec une bouteille en plastique de 500 ml, haute de 23,5 cm et de rayon à la base 2 cm. Cette bouteille a été choisie en particulier pour la simplicité de sa forme : un cylindre « parfait », c'est-à-dire sans variation du rayon ou effet de texture sauf à proximité du goulot. Les lancers sont filmés au ralenti avec une caméra haute résolution. Les vidéos sont analysées à l'aide du logiciel *Tracker*. Il n'y a pas de point particulier à suivre dans la bouteille. En revanche, nous pouvons facilement pointer la base et le bouchon de la bouteille (cf. figure 3A). À l'aide de ces deux points, nous pouvons aisément en déduire l'angle de la bouteille par rapport à un repère fixe (cf. figure 3B). L'angle de la bouteille par rapport à un point fixe n'a pas beaucoup d'intérêt. En revanche, cela permet d'accéder à la vitesse angulaire de la bouteille. Pour dériver, on utilise un algorithme qui calcule la pente entre deux points successifs sur toute la courbe. Le résultat n'est pas satisfaisant, les erreurs de pointage de la bouteille donnent une allure chaotique à la vitesse angulaire. La solution est de lisser en moyennant chaque point avec ses deux voisins et de répéter l'opération dix fois, puis

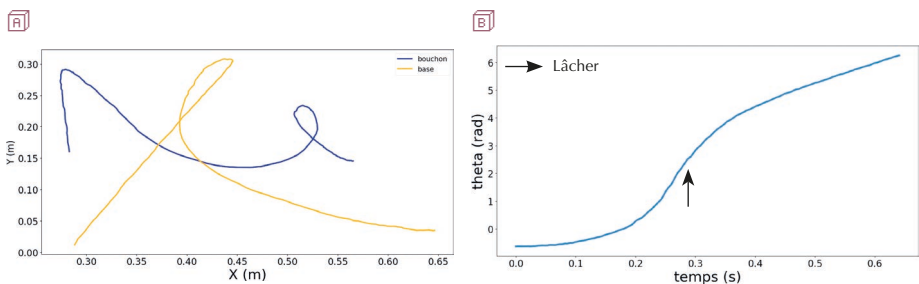


Figure 3 - A Trajectoire du bouchon et de la base pendant un lancer. *Remarque* : le mouvement se fait de la droite vers la gauche. **B** Angle de la bouteille en fonction du temps par rapport à un référentiel fixe quelconque. La phase de lancer apparaît aussi. Le lâcher se produit à 0,25 seconde. Ces courbes ont été tracées avec un remplissage d'environ 0,4.

de dériver la courbe lissée (cf. figure 4). Enfin, on lisse de la même manière dix fois la courbe dérivée. Le résultat obtenu est satisfaisant, la courbe lissée a l'allure de la courbe non lissée, mais sans le « bruit ». Le nombre de lissages est un compromis entre l'aspect lisse de la courbe et une sous-estimation de la vitesse angulaire (lisser une infinité de fois donnerait une courbe constante).

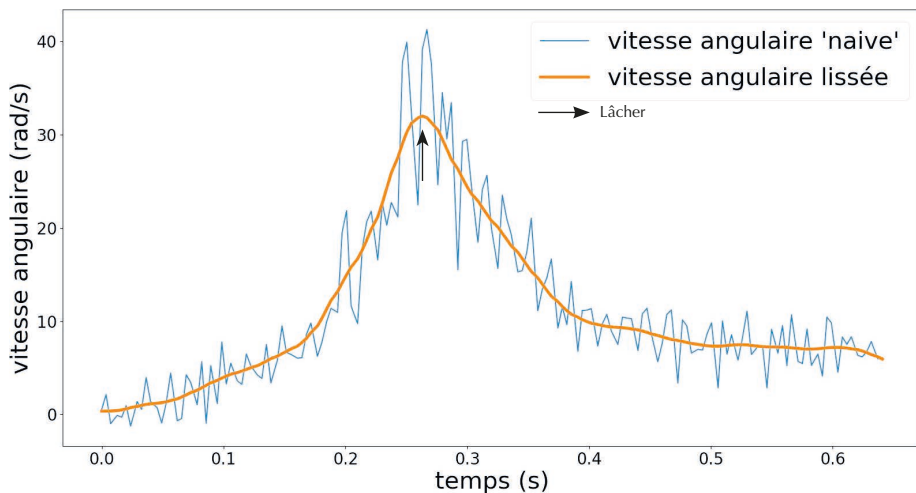


Figure 4 - Comparaison entre la courbe obtenue avec dérivation naïve (simple calcul de la pente) et dérivation avec lissages. On remarque que l'opération semble bien supprimer le « bruit » sans modifier l'allure générale de la vitesse angulaire.

On peut maintenant obtenir la vitesse angulaire au cours d'un lancer en fonction de différents remplissages. On remarque que l'allure entre une bouteille vide ou pleine et une bouteille moyennement remplie (entre $R = 0,25$ et $R = 0,75$) est très différente (cf. figure 5, page ci-contre). Pour des bouteilles très remplies ou très pleines, la vitesse angulaire est environ constante après le lâcher. En revanche, pour une bouteille moyennement remplie, dès le lâcher, la vitesse angulaire chute rapidement et passe bien en dessous de celle des bouteilles pleines ou vides. De manière générale, sur l'ensemble de la gamme, la vitesse angulaire de lancement d'une bouteille moyennement remplie est plus élevée que celle d'une bouteille pleine ou vide. En effet, pour une bouteille moyennement remplie, le ralentissement sera plus fort que pour une bouteille pleine ou vide. Le but étant toujours que la bouteille fasse un tour sur elle-même, il faut donc que l'opérateur la lance avec une plus grande vitesse angulaire si celle-ci est moyennement remplie. D'où le sommet observé sur la figure 6 (cf. page ci-contre) pour un remplissage de 40 %. À l'inverse, la vitesse à l'atterrissage (juste avant de toucher le sol) est plus élevée pour les bouteilles pleines ou vides (cf. figure 6, page ci-contre).

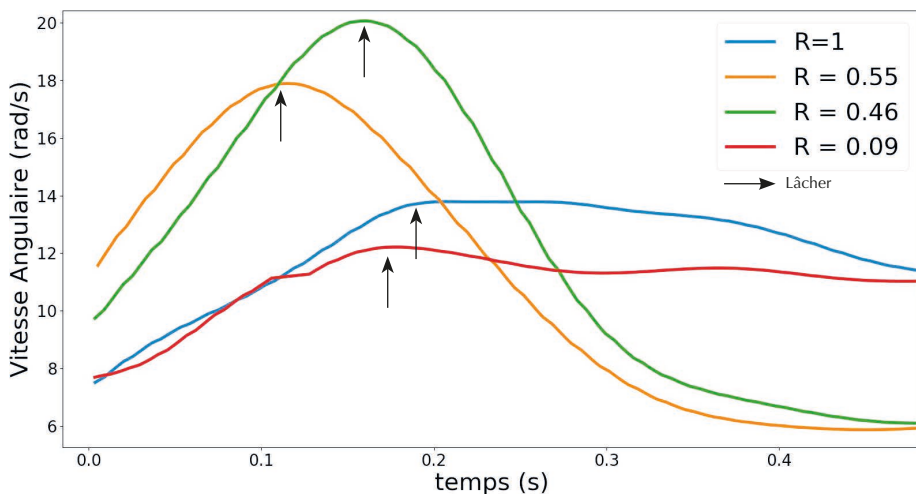


Figure 5 - Vitesse angulaire de plusieurs bouteilles en fonction du temps.
L'instant du lancer est le moment où la vitesse est maximale.

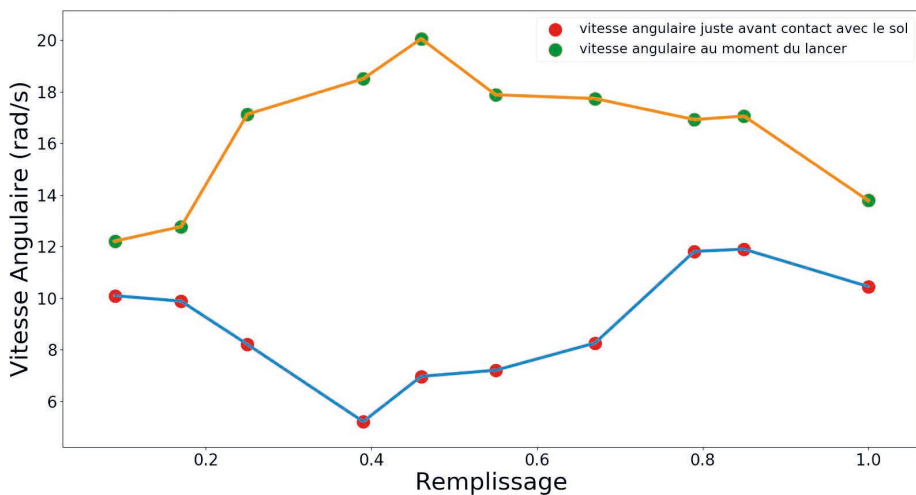


Figure 6 - Comparaison des vitesses angulaires des bouteilles au moment du lancer et juste avant de toucher le sol.

Pour évaluer le ralentissement des bouteilles indépendamment de la vitesse initiale de lancer, nous introduisons le taux de ralentissement relatif défini ainsi :

$$\tau = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} .$$

Avec ω la vitesse angulaire de la bouteille au temps t et ω_0 est la vitesse angulaire de lancement.

On observe (cf. figure 7) que le taux de ralentissement des bouteilles vides ou pleines est assez faible, il n'excède pas les 20 %. En revanche pour un remplissage moyen, le taux de ralentissement dépasse 70 %. En choisissant bien le remplissage, la vitesse angulaire décroît rapidement et il est plus aisé de faire atterrir la bouteille sur sa base. Il semble donc qu'il existe un optimum de remplissage.

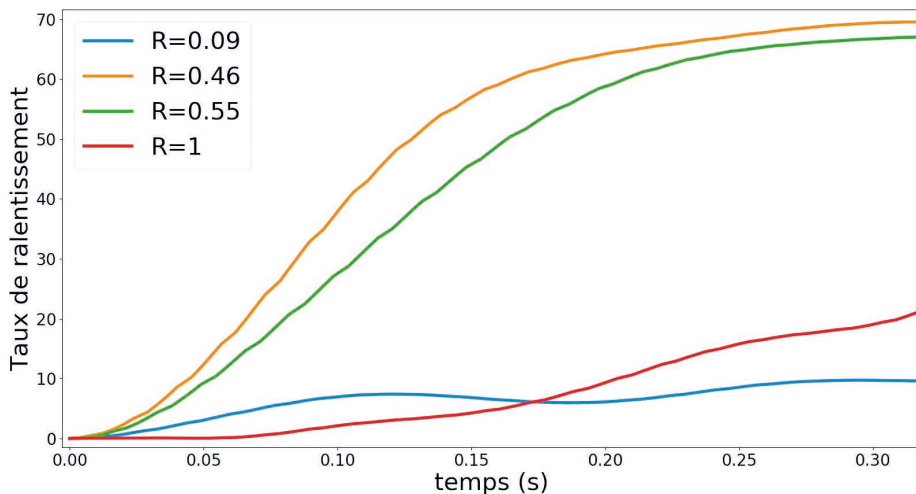


Figure 7 - Taux de ralentissement des bouteilles en fonction du temps. Si le taux est nul, alors la bouteille n'a pas du tout ralenti, s'il atteint 100 %, la bouteille ne tourne plus.

2. RECHERCHE DU CENTRE DE MASSE

Un autre sujet intéressant est de déterminer la position du centre de masse du système sans avoir à déterminer explicitement la répartition de l'eau dans la bouteille. L'idée est de déterminer la position et la vitesse initiale du centre de masse à l'aide des trajectoires du bouchon et de la base. Cela nous permet d'appliquer le principe fondamental de la dynamique au centre de masse du système dans le référentiel du sol considéré galiléen. Ensuite, on trace les positions successives de la bouteille (segments entre le bouchon et la base). Enfin, on cherche la position où la trajectoire du centre de masse (une parabole) coupe les positions de la bouteille (des segments) (cf. figure 8, page ci-contre). Il nous faut quelques hypothèses. Lorsqu'on lance la bouteille (en la tenant par le bouchon), on lui applique un couple. Ce couple maintient toute l'eau vers le bas de la bouteille et donc le centre de masse est dans la position la plus basse possible dans la bouteille. On suppose que le centre de masse garde cette position pendant toute

la phase de lancement. Il reste à déterminer la position et la vitesse du centre de masse au moment du lâcher. Utilisons les analyses précédentes : nous avons vu que dès que la bouteille est lâchée, sa vitesse angulaire chute brusquement. On suppose donc que le moment où la bouteille est lâchée est le moment où la vitesse angulaire est maximale.

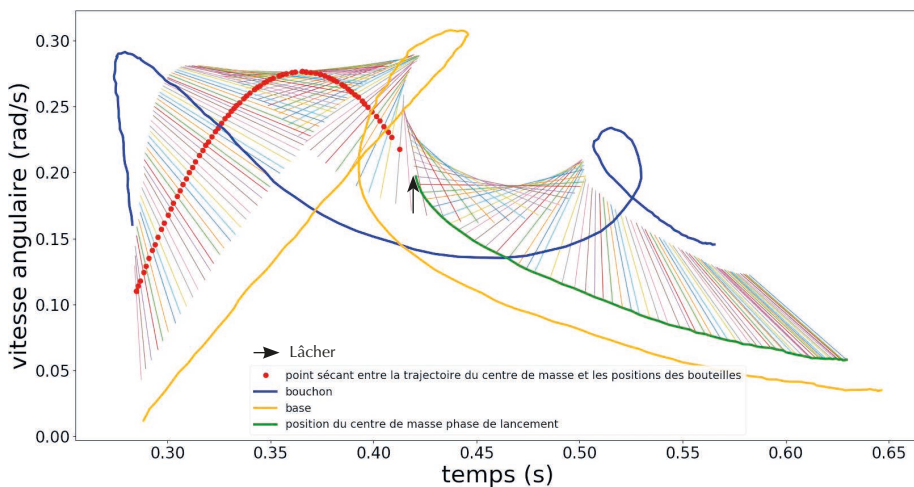


Figure 8 - Illustration de la méthode de recherche du centre de masse de la bouteille. Le mouvement se fait de droite à gauche.

De plus, il faut prendre garde au moment où la bouteille atteint son apogée. À ce moment, la trajectoire du centre de masse coupe deux fois certains segments. Il faut filtrer les points à garder ou non. Pour cela, on s'aide de la pente de la parabole et des segments. Lorsque le centre de masse s'élève (pente de parabole positive), la bouteille est donc bouchon vers le bas (pente des segments positive). À l'inverse, lorsque le centre de masse descend (pente de parabole négative), la bouteille est aussi dans la phase de descente donc bouchon vers le haut (pente des segments négative). On obtient ainsi l'allure de la position du centre de masse dans le référentiel de la bouteille sans avoir eu à déterminer la manière dont l'eau se déplace dans la bouteille une fois celle-ci lâchée (cf. figure 9, page ci-après). Cette étude ne concerne que les phases où l'opérateur tient la bouteille et pendant la chute libre. Une fois que la bouteille touche le sol, l'eau se rassemble rapidement en bas de la bouteille à cause de la gravité et le centre de masse retrouve sa position basse. On observe que peu de temps après le début du lâcher, le centre de masse s'élève dans la bouteille puis se stabilise un peu en dessous de la moitié de la bouteille. Cela montre bien que l'eau se répartit dans la bouteille puis atteint un état d'équilibre.

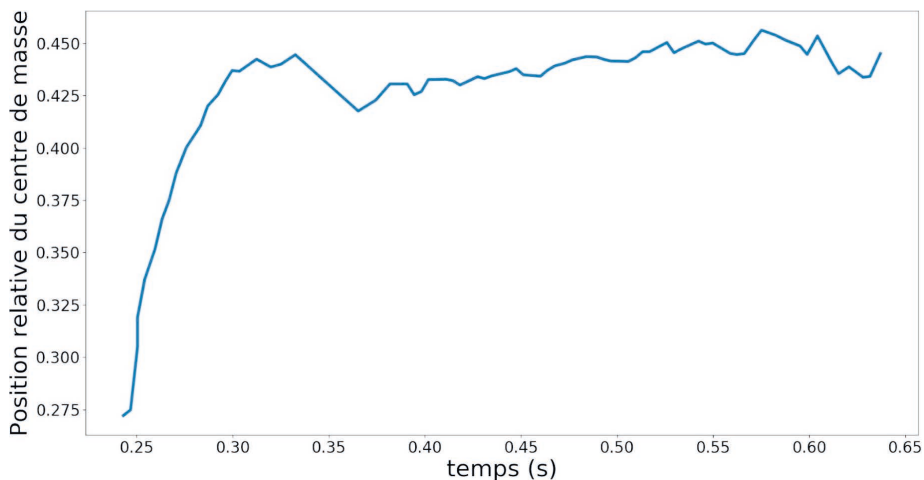


Figure 9 - Résultats de la recherche de la position du centre de masse après le lâcher.

Cependant, cette méthode présente plusieurs faiblesses. Comme nous l'avons vu précédemment, dériver des courbes de points n'est pas aisée et il faut souvent appliquer un coefficient de correction pour la vitesse.

3. MODÉLISATION INFORMATIQUE D'UN LANCER

Les résultats présentés ci-dessus restent assez qualitatifs. Pour améliorer la compréhension du sujet, j'ai conçu un modèle informatique. Le but de ce modèle est de modéliser le mouvement de l'eau dans la bouteille. À l'aide des études précédentes,

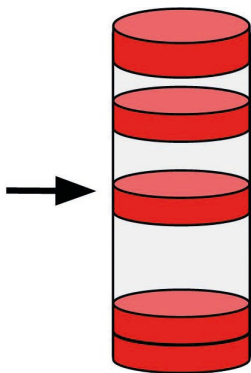


Figure 10 - Illustration des simplifications du modèle.

nous pouvons déterminer quels sont les principaux phénomènes et contraintes à prendre en compte. Commençons par ramener le problème à une dimension, on considérera que l'eau ne peut se déplacer que selon l'axe de la bouteille (de haut en bas). On découpe l'espace de la bouteille en un nombre N de cases (proche de 1000) en forme de disque. Ces cases sont soit pleines d'eau soit vides. On discrétise aussi le temps en instants dt d'environ 0,5 ms (cf. figure 10). L'algorithme mis en place est simple : la bouteille part avec une certaine configuration (répartition

de l'eau en bas de la bouteille et vitesse angulaire initiale). Pour chaque instant dt , on applique à chaque cellule la force d'inertie d'entraînement et on détermine la position des cellules d'eau à la fin de cet instant. On en déduit le nouveau moment d'inertie et grâce à la loi vue en introduction, on trouve la nouvelle vitesse angulaire. On répète cette opération sur la durée caractéristique d'un lancer (entre 0,3 et 0,5 s).

Sur la figure 11, nous pouvons constater que ce modèle reproduit bien un lancer de bouteille. Ce modèle est totalement déterministe, il permet d'accéder à beaucoup de caractéristiques de la bouteille au cours du temps (vitesse angulaire, moment d'inertie, position du centre de masse). Il permet aussi de comparer rapidement l'influence de certains paramètres comme la vitesse initiale ou le niveau de remplissage. Nous avons maintenant accès à beaucoup plus d'informations qu'avec des observations expérimentales. Commençons par comparer l'angle de la bouteille (par rapport à un référentiel fixe) obtenu par le modèle avec celui obtenu par l'expérience. Il est pertinent de juger la qualité du modèle sur cette mesure, car l'angle est aisé à mesurer (contrairement à la vitesse angulaire par exemple).

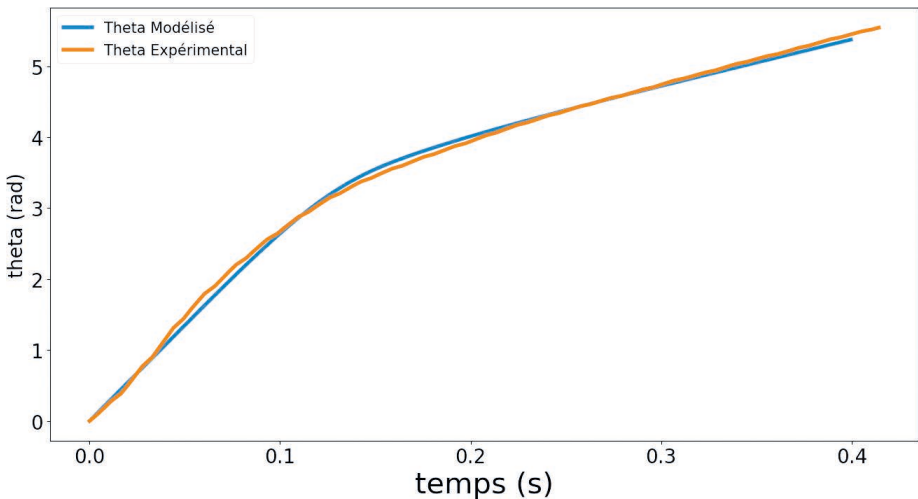


Figure 11 - Comparaison de l'angle de la bouteille obtenu expérimentalement mesuré et de l'angle obtenu grâce au modèle après le lâcher. Le modèle suit fidèlement l'expérience (mêmes allures et temps de changement de régime respecté).

On observe que le modèle est très fidèle à l'expérience. Les courbes se superposent bien. On peut donc comparer des données plus compliquées à mesurer (cf. figure 12, page ci-après).

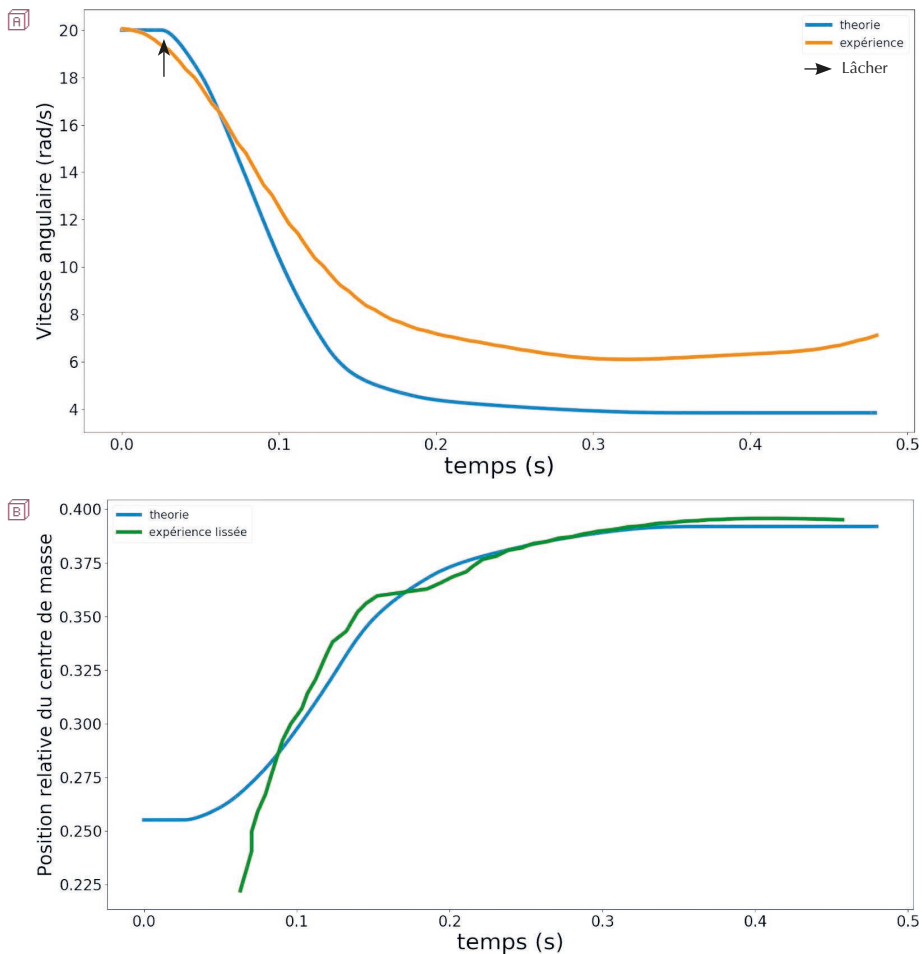


Figure 12 - Comparaison de la vitesse angulaire (en haut) et de la position du centre de masse après le lâcher (en bas). La courbe expérimentale de la position du centre de masse (cf. figure 11, page précédente) a ici été lissée pour avoir un comportement plus réaliste.

Le modèle semble donc bien saisir l'essence des phénomènes en jeu. La force d'inertie d'entraînement est le moteur du ralentissement de la bouteille pendant la phase de vol. Cette force est une force interne et elle ne s'oppose pas directement au mouvement de rotation de la bouteille. Cependant, le déplacement des cellules d'eau par rapport au centre de masse (et donc l'axe de rotation) change le moment d'inertie et donc la vitesse angulaire d'après la première loi. En réalité, ce que produit le déplacement de l'eau dans la bouteille est une transformation de l'énergie cinétique du système

en énergie potentielle de rotation (cf. figure 13). Avec :

$$E_{c_{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$E_{p_{rot}} = \int_0^L \frac{\mu}{2} \omega^2 (x_{\text{centre de masse}} - x)^2 dx.$$

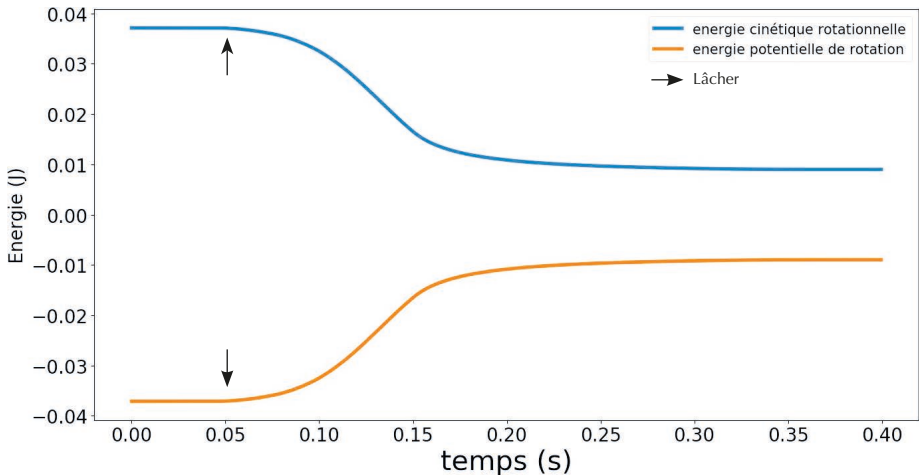


Figure 13 - Évolution de l'énergie potentielle de rotation et de l'énergie cinétique rotationnelle. Dans le modèle, l'énergie cinétique rotationnelle est convertie en énergie potentielle de rotation.

La vitesse angulaire est donc bien fonction de la répartition de l'eau dans la bouteille. Si à l'inverse, une force s'opposait à la force d'inertie d'entraînement et que l'eau se concentrait en un point, la vitesse angulaire augmenterait. Ainsi, le ralentissement n'est pas dû à une perte d'énergie (frottement par exemple), mais à une nouvelle répartition de l'énergie. Si l'eau se re-concentre en une zone de la bouteille, le moment d'inertie diminue et la vitesse angulaire de la bouteille augmente.

Le modèle semble donc très fiable. Il concorde bien avec les résultats expérimentaux disponibles et permet de faire des prévisions. On peut donc s'appuyer dessus pour faire des mesures plus fines et impossibles à réaliser expérimentalement. Par exemple, au lieu d'avoir une gamme de dix remplissages différents, on peut répéter des lancers avec des gammes de dix mille remplissages de bouteilles. On peut ainsi obtenir le taux de ralentissement d'une bouteille en fonction du remplissage (cf. figure 14, page ci-après). On observe qu'une fois de plus, le modèle et l'expérience correspondent même si ici l'écart est plus conséquent. En effet, à cause des lissages et des dérivés, les mesures perdent en précision. En revanche, le modèle nous montre que pour un remplissage inférieur à 0,19, le taux de ralentissement est nul. Dans ces conditions, le centre de masse du système est au-dessus du niveau de l'eau. Ainsi, la force d'inertie d'entraîne-

ment au lieu de disperser l'eau, ne fait que la maintenir au fond. Mais dès que le centre de masse du système passe en dessous du niveau de l'eau, la force d'inertie d'entraînement projette l'eau dans toute la bouteille, augmentant le moment d'inertie et donc abaissant la vitesse angulaire. On arrive rapidement à un maximum aux alentours de $R = 0,37$. C'est pour ce remplissage que la bouteille ralentira le plus, favorisant ainsi la réussite du défi du lancer de bouteille. Après ce maximum, le taux de ralentissement décroît lentement jusqu'à revenir à 0 pour $R = 1$ (bouteille complètement remplie). L'eau occupe de plus en plus de place dans la bouteille ce qui réduit les possibilités de répartir l'eau et donc d'augmenter le moment d'inertie. À $R = 1$, l'eau ne peut plus se déplacer, le moment d'inertie est constant et donc la vitesse angulaire aussi.

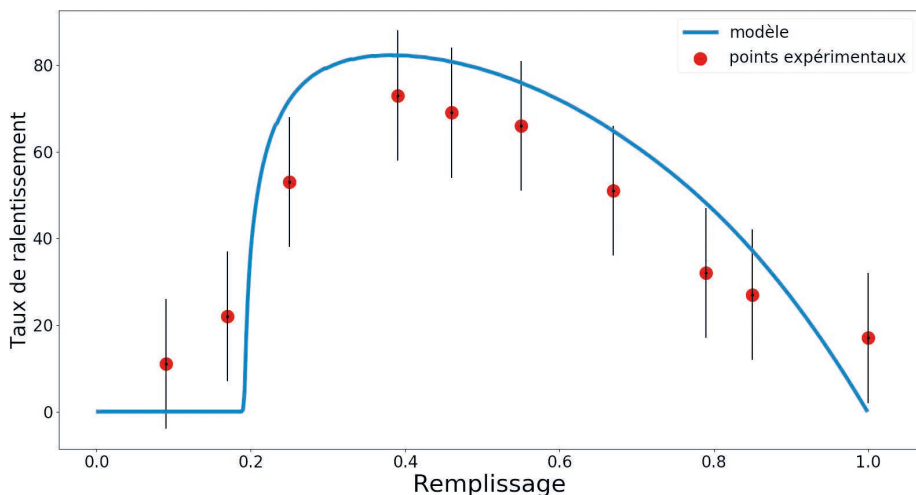


Figure 14 - Taux de ralentissement en fonction du remplissage. Les points rouges correspondent aux mesures expérimentales.

Récapitulons les résultats de ce modèle. Avec des hypothèses permettant d'avoir un modèle simple théoriquement, on a obtenu un modèle très fidèle à l'expérience. On peut donc affirmer que les paramètres importants dans le défi du lancer de bouteille sont : le remplissage et les déplacements de l'eau le long de l'axe base-bouchon de la bouteille. De plus, la force d'inertie d'entraînement est le seul moteur du ralentissement de la bouteille. Il y a un régime transitoire durant lequel l'eau se répartit dans la bouteille, augmentant ainsi le moment d'inertie et diminuant la vitesse angulaire par conservation du moment cinétique. Ce modèle étant fiable, il nous a permis d'accéder à des données non mesurables ou difficilement mesurables : le centre de masse s'élève jusqu'à atteindre une position d'équilibre, le remplissage optimum est 37 %.

CONCLUSION

À partir d'un nombre limité de mesures expérimentales, en l'occurrence la trajectoire du bouchon et du bas de la bouteille pour différents niveaux de remplissage, j'ai pu déterminer la position du centre de gravité dans la bouteille et l'évolution de la vitesse de rotation de la bouteille, ainsi que l'influence du remplissage sur celle-ci. J'ai ensuite conçu un modèle qui s'avère expliquer très fidèlement le comportement de l'eau dans la bouteille si on en juge par la corrélation des résultats du modèle avec les données issues de l'expérimentation. Cela m'a permis de trouver le taux de remplissage optimum à savoir 37 % pour obtenir la vitesse de rotation la plus faible à l'atterrissage et ainsi avoir les meilleures conditions pour réussir le défi du lancer de bouteille.

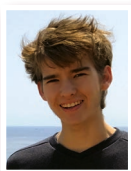
Cette étude pourrait être complétée par une étude approfondie de l'atterrissage de la bouteille (rebond, glissement, action de l'eau...).

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier les professeurs qui m'ont accompagné tout au long de ce travail, notamment Christian Brunel et Jules Svartz, mais aussi les laborantins, spécialement Michel Morabito et Babette Giacobi.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.J. Dekker, L.A.G. Eek, M.M. Flapper, H.J.C. Horstink, A.R. Meulenkamp, J. van der Meulen, E.S. Kooij, J.H. Snoeijer and A. Marin, "Water Bottle Flipping Physics", *American Journal of Physics*, vol. 86, n° 10, p. 733-739, October 2018.
- [2] P. S. Carvalho and M. J. Rodrigues, "The bottle-flip challenge demystified: where is the Centre of Mass?", *Physics Education*, 52(4):045020, July 2017.
- [3] M.A. Dias, P. S. Carvalho and M. Rodrigues, "How to determine the Centre of Mass of bodies from Image Modelling", *Physics Education*, 51(2):025001, March 2016.



Adrien GAY
Étudiant en classe préparatoire
Lycée Masséna
Nice (Alpes-Maritimes)